

基于“误差流”理论的精密线性平台 微行程定位精度表征方法*

唐 皓¹ 张 栋¹ 张 贺¹ 高贵兵¹ 郑 煜²

(1. 湖南科技大学机电工程学院 湘潭 411201;

2. 中南大学机电工程学院 长沙 410083)

摘要: 定位精度是衡量精密线性平台运动准确度的关键指标。本文提出一种基于“误差流”理论的概率密度函数传递方法,通过建立微行程尺度下的定位误差数学模型,揭示定位误差传递规律,获取可用于表征定位精度分布规律的行程-定位误差函数,为后续误差预测与补偿提供理论基础与技术支持。首先,剖析精密线性平台的机械结构,分析误差源,比较宏、微行程尺度下影响定位精度各因素及其权重,获取敏感误差项与相应的分布信息;其次,构建精密线性平台拓扑构型图,揭示定位误差传递规律;第三,基于“误差流”理论,建立“组件加工工艺——加工误差——装配误差——微动特性——微行程定位误差”的数学模型,逐阶段推导微行程尺度下定位精度的函数表达式。实验结果表明,影响定位精度各因素权重随行程变化而变化的趋势与基于“误差流”理论的数学模型一致,新方法分布曲线在微行程(0.01mm-1mm)下与实验结果更接近。

关键词: 精密线性平台; 微行程; 定位精度; 误差流理论; 概率密度函数

中图分类号: TH115

Positioning accuracy characterization approach in micro-scale displacement for precise linear stage based on stream of variation theory

TANG Hao¹ ZHANG Dong¹ ZHANG He¹ GAO Guibing¹ ZHENG Yu²

(1. College of Mechanical Engineering, Hunan University of Science and Technology, Xiangtan 411201;

2. College of Mechanical and Electromechanical Engineering, Central South University, Changsha 410083)

Abstract: Positioning accuracy is an essential index for judging the moving accuracy of precise linear stage. In this paper, a propagation approach of probability density function based on stream-of-variation theory is proposed. Through establishing the positioning error model in micro-scale displacement, the positioning error propagation law is revealed, and the function expression for characterizing the distribution pattern of positioning accuracy is derived, which is beneficial for following error prediction and compensation. Firstly, the mechanical structure of precise linear stage is analyzed. By comparing the error terms weight for positioning accuracy between micro and normal scale, the sensitive error terms and corresponding information is developed. Secondly, through adopting Homogeneous Transformation Matrix, the topology schematic of precise linear stage is established, and the positioning error propagation law is revealed. Thirdly, based on the stream-of-variation theory, the error model that from ‘part processes-mechanical error-assembly error-micro dynamic characteristic-micro displacement positioning accuracy’ is established. The experimental results indicate that the trend that the error term weight for positioning accuracy changing with the displacement is in coincidence with the error model based on stream-of-variation theory, and the new approach is more accurate and closer to experimental results in micro-scale (0.01mm-1mm).

Key words: Precise linear stage; Micro-scale displacement; Positioning accuracy; Stream-of-variation theory; Probability density function

0 前言

精密线性平台常用于实现微米级运动控制。在

精密工程领域中,如机器人路径规划、微/光电子器件封装、机器视觉等场合有广泛应用^[1-2]。定位精度是衡量精密线性平台运动精确度的重要参数,不仅是精度标准体系下的关键指标,同时也直接决定系统工作性能的高低。

定位精度的表征不仅包含区间上下限的数值信息,而且还需获取区间内误差值的概率分布,从

* 国家自然科学基金(51705149),湖南省教育厅优秀青年(20B212)资助项目

而预测可能出现的误差值。目前,关于定位精度的表征方法,常遵循标准体系的数学公式与精度指标的物理意义,依照相关测量步骤,计算得出数值,并采用正态分布表示其特征与范围^[3-4]。该方法对于传统意义上的大行程、精度要求不高的场合,基于统计学中心极限定理,计算过程简单,处理方便。然而,传统定位精度表征方法只适用于获取误差值的范围,难以准确描述区间内各误差值对应的概率,也正因如此才不得不采用正态分布对定位精度进行表征。在工程上精度标准仍未完全统一的背景下,对于微米级精度要求的场合,特别是运动行程小于1mm的精密工程领域中,传统定位精度表征方法既无法揭示定位误差(精度)的传递过程,难以精确体现运动系统的微动特性,同时其数学意义与相应的概率分布也不甚准确,较难适用于微行程尺度的场合。

针对运动系统定位精度问题,许多学者展开了相关研究。李杰^[5]的综合论述了几种不同的误差建模方法,系统分析五轴数控机床空间定位精度提升的发展方向。李文龙^[6]针对复杂精密机器人几何误差建模方法,围绕运动链和误差传递路径展开了研究,对于提升精密线性平台精度、提高精密工程相关产品竞争力有一定帮助。柴馨雪^[7]提出了一种针对2-UPR-RPU并联机器人的动力学分析方法,采用齐次坐标变换矩阵描述空间位姿变化过程。叶长龙^[8]提出了基于旋量理论的全方位移动机器人建模方法,得出各机构组件与末端装配器位姿偏差的数学关系,同时开展敏感性分析辨识重要误差项。Tang^[9]提出了一种基于误差流理论的多轴精密运动系统误差建模方法,可对复杂系统开展如结构优化、运动顺序优化等研究,具有较好的通用性。江献良^[10]基于数字孪生建模方法,分析了直驱部件在高档数控机床的应用,形成了具有较好抵抗惯量摄动能力的复合控制策略。Wang^[11]围绕机床精度的双球杆测试,采用了一种重构模型法,对于误差辨识具有较好的应用。Li^[12]考虑了CNC机床传动系统摩擦热对定位精度的影响,同时建立了时变可靠性预测模型。Zhong^[13]针对多自由度数控机床平动轴空间误差,研究了装配过程对误差传递规律的影响,对于分析误差传递流向具有借鉴意义。可以看出,如何推导用于描述微行程定位精度的概率密度函数,是精确表征微行程定位精度分布规律的关键。上述研究多聚焦于如何建立复杂运动系统定位精度的数学模型与后续应用,对于准确表征定位精度,特别是微行程尺度下定位精度的误差组成、传递规律、

分布特点等仍需要重点关注。

关于精确表征定位精度的研究仍存在以下几个问题亟待厘清:1. 微行程定位精度(误差)成因特点;2. 微行程定位精度(误差)传递机理;3. 如何获取准确的概率密度函数表达式。本文针对精密运动系统微行程定位误差表征问题,提出了一种基于“误差流”理论的定位误差概率分布计算方法。通过比较分析精密线性平台宏、微行程下定位精度及相关精度指标的分布趋势与走向特点,分析系统微动特性,剖析微行程定位误差成因与影响权重,基于“误差流”理论建立微行程下“组件加工工艺——加工误差——装配误差——微动特性——微行程定位误差”的数学模型,逐步推导微行程定位精度的概率密度函数,实现微行程定位精度的精确描述,并设计测量实验验证该方法的有效性,为精确描述系统运动特性、提升运动精度提供理论基础。

1 概率密度函数推导过程

1.1 “误差流”理论简介

推导定位精度分布规律需获取定位精度的误差模型,而其关键在于揭示误差传递规律,获取误差变化趋势,最终得出精确表征定位精度的概率密度函数表达式。误差流理论作为工业工程领域的重要理论方法^[14],主要是指随着工艺路线的变化,由于引入不同类型的干扰信息,因此产品质量特性受到不同阶段影响的一种规律。该方法表现了制造过程中产品质量属性的变化趋势,如图1所示:

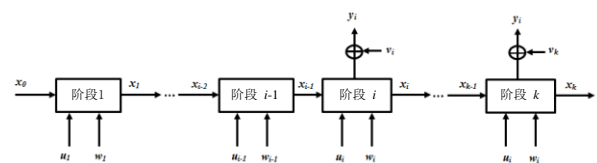


图1 包含各误差项的经典多阶段系统

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{A}_{i-1} \mathbf{x}_{i-1} + \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i + \mathbf{w}_i \quad (1)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{C}_i \mathbf{x}_i + \mathbf{v}_i \quad (2)$$

其中, \mathbf{x}_i 表示在阶段 i 后产品质量性能, \mathbf{u}_i 表示阶段 i 中误差带来的影响, \mathbf{w}_i 表示非建模因素, 如环境因素等, \mathbf{v}_i 表示测量误差, $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ 矩阵分别为不同误差项的系数矩阵。从上图可知, 目标(产品质量)偏差的变化趋势、误差源的影响过程与传递规律均可推导得出。

精密运动系统定位精度的成因机理与工业工程领域产品质量属性变化规律存在较多相近特性, 如包括误差的传递规律、各阶段引入的误差类型等,

部分学者也采用该方法用于工件形位公差的误差辨识与误差追溯^[15-16]。基于此,根据误差流理论的特点与优势,可将“误差流”理论应用至提炼定位精度的误差传递规律中,并建立相应的误差模型,从而推导定位精度的分布规律。

设目标函数由若干变量共同影响,如式 3 所示:

$$P = f(\mathbf{x}) = (x_1, x_2, \dots, x_i) \quad (3)$$

其中 P 表示目标函数, $f(x)$ 表示该目标函数的解析式, x_1 到 x_i 表示影响目标函数 P 的参数。其分布规律可通过若干次不同类别的概率密度函数计算、合并及推导得出。因此理论上,若已获取定位精度的各误差参数及相应的分布函数,可基于定位精度误差模型,逐步推导得出定位精度的分布规律,相较于传统方法直接采用正态分布进行表征而言,更为精确。

目前精度体系下表征定位精度的方法主要是采用正态分布进行描述,根据大数定律与中心极限定义,若随机变量 y_1, y_2, \dots, y_n 独立同分布,且具有有限的数学期望和方差,则该随机变量之和近似服从正态分布。这也是目前许多精度定义方法遵循的基本原则。然而,微行程尺度下定位精度成因机理不同于宏行程,中心极限定理的适用范围也发生的变化,主要指:

1. 中心极限定理规定所有变量或是均为独立同分布,或是均匀的近似独立同分布;而在定位精度的成因中,理论上各误差项虽相互独立,但由于加工工艺、装配偏差、几何尺寸等原因并不遵循同分布,如步进电机输出稳定性可被考虑为均匀分布,而丝杠副导程误差服从正态分布,且其数值与分布形状差异性较大,其误差敏感性权重与宏行程相比亦相差较大。

2. 根据定位精度的误差传递过程,考虑配合件的约束关系,其误差模型求解过程不是各变量的线性相加,而是复杂的包含一系列相加与相乘的过程,不能简单地用随机变量之和表示该误差模型。

3. 中心极限定理规定,当各分布的误差量很小时,可视作同分布,而在分析微行程定位精度中,由于行程很小,使得误差量与行程相比,其数量级相差不大,因此难以忽略误差量的影响,因此也不完全适用中心极限定理。

综上,单纯地采用正态分布描述微行程尺度的定位精度,既不够系统也不够精确。因此,理想情况下,通过分析微行程定位精度的误差传递过程,提炼出误差模型,并获取各误差参数的概率密度函数;根据误差模型,最终推导出表征定位精度的概

率密度函数。

理论上,微行程定位精度空间位姿偏差分布规律可由若干概率密度函数有限次迭代计算得出,但过程较为复杂。考虑到实际工程中目标函数多为正态或均匀分布,设 $f(x)$ 遵循正态分布, $g(x)$ 遵循均匀分布,概率密度函数如下:

$$f(x): P_f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, N(0,1) \quad (4)$$

$$g(x): P_g(x) = \frac{1}{b-a}, U(a,b) \quad (5)$$

分别计算正态分布与均为分布间的运算规律,6类基本运算类型如表 2 所示:

表 2 正态分布与均匀分布的基本运算类型

类型	概率密度函数	仿真图和拟合图
$Q_1 = g_1(x) + g_2(x)$	$P_{Q_1}(z) = \begin{cases} \frac{z-2a}{(b-a)^2}, & 2a \leq z \leq a+b \\ \frac{2b-z}{(b-a)^2}, & a+b < z \leq 2b \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	
$Q_2 = g_1(x) * g_2(x)$	$P_{Q_2}(z) = \begin{cases} \frac{2 \ln 0.2 - \ln z }{2 \cdot 0.2^2}, & z < a^2 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$	
$Q_3 = f_1(x) + g_1(x)$	$P_{Q_3}(z) = \frac{\frac{z-a-\mu}{\sigma} - \frac{z-b-\mu}{\sigma}}{2(b-a)} \cdot \frac{\text{erf}(\frac{\sigma}{\sqrt{2}}) - \text{erf}(\frac{\sigma}{\sqrt{2}})}{2(b-a)}$	
$Q_4 = f_1(x) * g_1(x)$	$P_{Q_4}(z) = \frac{1}{2a_1a_2} \ln \frac{a_1a_2}{ z }, \quad a_1 > 0, a_2 > 0$	
$Q_5 = f_1(x) + f_2(x)$	$P_{Q_5}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} e^{-\frac{(z-\mu_1-\mu_2)^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}$	
$Q_6 = f_1(x) * f_2(x)$	$P_{Q_6}(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}z} e^{-\frac{z}{2}}$	

备注:对于空间 T 内,除开与运动量、空间位置补偿量有关以外,运动体实际位姿由系统误差决定。考虑到误差源概率密度函数构成类型常为正态分布与均匀分布,根据误差传递规律,基于若干次正态分布与均匀分布的运算可推导出实际位姿的分布规律。

若目标函数为复杂多项式,可通过表 2 的基本运算法则逐步推导得出。因此,根据上述分析,针对精密运动系统微行程定位精度的分布规律,提出了一种基于误差流理论的概率密度函数推导方法,过程如图 2 所示,概率密度函数的合并计算工具可参考表 2。

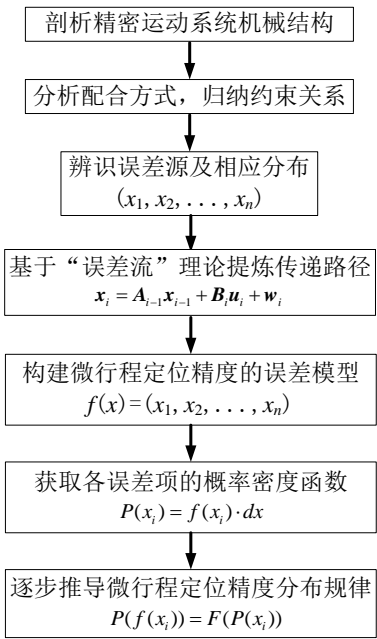


图2 基于误差流理论的概率密度函数推导方法

2 定位精度误差源辨识

微米级线性平台包括步进电机-丝杠-导轨式、直线电机驱动式、气浮/磁悬浮式、压电材料式等，综合响应速度、抗干扰能力、成本校核等因素，目前市场上常使用高细分步距角步进电机-滚珠丝杠-交叉滚柱导轨式的微米级精密线性平台，通过电机输出转矩，引导滚珠丝杠副进行转动，带动载物台水平运动，达到从旋转运动转化为水平运动的目的，其精度等级常为微米级，结构如图3所示。

影响精密线性平台定位精度的误差因素可分为零部件加工误差（包括电机输出波动、丝杠副导程误差、导轨副加工精度等）、安装与配合误差、系统动力学影响、配合面摩擦等。考虑其应用环境常恒温恒湿、加工精度较高、载荷及运动速度均较小，因此主要影响定位精度的误差项为几何误差参数，分类如表2所示。

为精确得到平台定位误差的传递过程，采用拓扑结构描述各组件间的结构关系，如下图所示。其中，电机-联轴器-丝杠配合误差可综合考虑为一项同轴度位置公差，丝杠-轴承配合误差可移至丝杠-螺母座综合考虑。

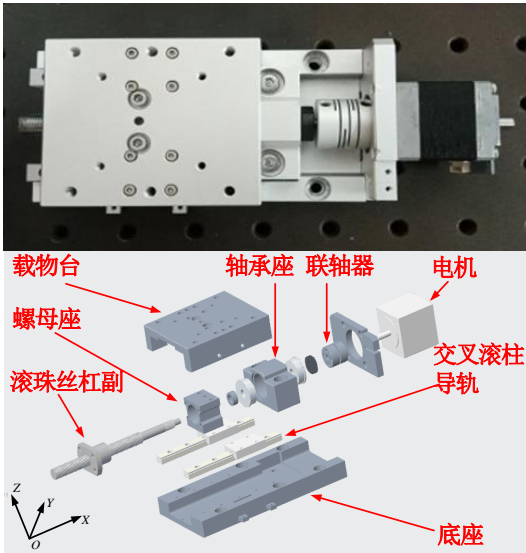
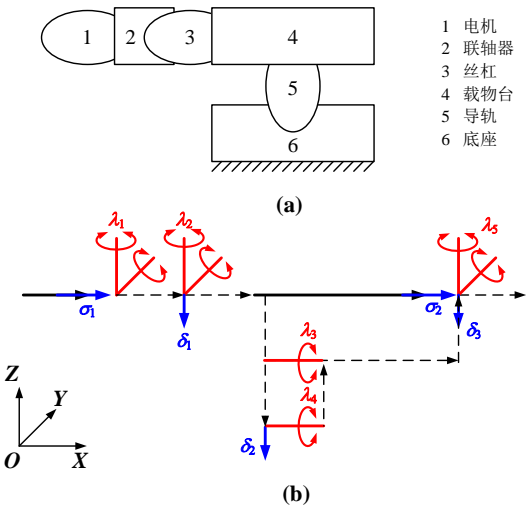


图3 精密线性平台结构图



(a) 拓扑构型图 (b) 运动尺寸链与误差分布图

图4 精密运动平台结构示意图

表2 影响精密线性平台定位精度的几何误差参数

误差类别	误差组成	参数
直接反映的误差项	电机输出精度	σ_1
	滚珠丝杠副导程误差	σ_2
	轴承座 Z 向尺寸几何误差	δ_1
零件尺寸误差	底座 Z 向尺寸几何误差	δ_2
	螺母座 Z 向尺寸几何误差	δ_3
零件装配误差	电机-联轴器同轴度	λ_1
	联轴器-丝杠同轴度	λ_2
	丝杠-螺母座同轴度	λ_3
	丝杠-轴承同轴度	λ_4
	螺母座-载物台正交性	λ_5
	底座-导轨平行度	λ_6
	导轨-载物台平行度	λ_7

图4(a)表示核心组件间的机械装配结构与运动关系，图4(b)表示运动尺寸链传递关系与几何误差项分布情况。根据图4所示，采用齐次坐标描述系统空间位姿变化，其中前三列表示姿态，第四列表示位置，如表所示：

表 3 不同物理意义的齐次变换矩阵

类型	矩阵
运动量矩阵	$T^o = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x^o \\ 0 & 1 & 0 & y^o \\ 0 & 0 & 1 & z^o \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
运动误差矩阵	$K^m = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma^m & \Delta\beta^m & \Delta x^m \\ \Delta\gamma^m & 1 & -\Delta\alpha^m & \Delta y^m \\ -\Delta\beta^m & \Delta\alpha^m & 1 & \Delta z^m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
安装误差矩阵	$K^a = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\gamma^a & \Delta\beta^a & 0 \\ \Delta\gamma^a & 1 & -\Delta\alpha^a & 0 \\ -\Delta\beta^a & \Delta\alpha^a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

基于误差流理论，结合平台结构示意图与拓扑构型图，将精密线性平台定位误差的传递过程体现出来，如下图所示：

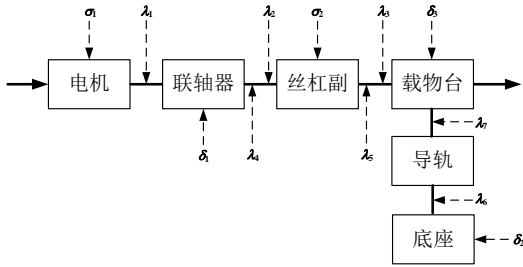


图 5 基于误差流理论的定位误差传递过程

运用误差变换矩阵构建各误差项的传递过程：

$$T_4 = P_0 \cdot I_m \cdot \prod_{i=1}^4 Q_{(i-1)i} \cdot \prod_{i=1}^2 Q_{6(6-i)} \quad (6)$$

$$P_4 = P_0 \cdot I_m \cdot \sum_{i=1}^4 Q_{(i-1)i} E_{(i-1)i} \cdot \sum_{i=1}^2 Q_{6(6-i)} E_{6(6-i)} \quad (7)$$

其中， T_4 ， P_4 分别表示平台理论位姿与实际位姿矩阵， P_0 表示初始位姿矩阵， I_m 表示输入量矩阵， Q_i 表示图 4 中第 i 个组件尺寸矩阵， E_i 表示第 i 个组件的误差矩阵。将上两式相减，最终可得平台位姿实际偏差：

$$E = P_4 - T_4 \quad (8)$$

式 (6) 为精密线性平台位姿精度的误差模型，其中 $E(1,4)$ 为精密线性平台定位精度的误差模型。

根据定位误差的传递过程，基于公式 (6)-(8)，精密线性平台位姿偏差可由下式求得：

$$P_4 = P_0 \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_{\sigma_1} + X_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -w_{\lambda_1} & v_{\lambda_1} & 0 \\ w_{\lambda_1} & 1 & 0 & 0 \\ -v_{\lambda_1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -w_{\lambda_2} & v_{\lambda_2} & X_2 \\ w_{\lambda_2} & 1 & 0 & 0 \\ -v_{\lambda_2} & 0 & 1 & z_{\delta_1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -w_{\lambda_3} & v_{\lambda_3} & X_3 \\ w_{\lambda_3} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -u_{\lambda_3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & X_4 \\ 0 & 1 & -u_{\lambda_4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & z_{\delta_2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (9)$$

其中，各误差项如表 1 所示， X_1 ， X_2 ， X_3 ， X_4 ，分别为电机、丝杠副、导轨副与载物台 X 方向的尺

寸，即各坐标系的原点坐标差。

将实际位姿偏差与理论位姿偏差相减，可得精密线性平台定位精度的数学表达式，如下式所示：

$$E_x = (v_{\lambda_1} + v_{\lambda_2} + v_{\lambda_3}) \cdot z_{\delta_2} + (v_{\lambda_1} + v_{\lambda_2}) \cdot z_{\delta_3} + v_{\lambda_1} \cdot z_{\delta_1} + x_{\sigma_1} + x_{\sigma_2} \quad (10)$$

式 (10) 中，相较于运动行程量，若将各误差项考虑为数值较小的物理量，则各高阶无穷小可予以忽略，式 (10) 可简化为：

$$E_x = x_{\sigma_1} + x_{\sigma_2} \quad (11)$$

即为传统的定位精度表征方法。

实际上，式 (10) 中的误差项不全遵循正态分布，且数值相差较大，无法视作独立同分布。同时，若运动量 $< 1\text{mm}$ 时，行程与误差项的数值较为接近，采用中心极限定理难以准确表征定位精度的分布规律。因此，根据表 2 的基本分布类型，微行程定位精度的概率密度函数将基于误差流理论逐步推导计算得出，过程如下图所示：

$$E_x = \left[\begin{matrix} v_{\lambda_1} + v_{\lambda_2} + v_{\lambda_3} \end{matrix} \right] \cdot z_{\delta_2} + \left[\begin{matrix} v_{\lambda_1} + v_{\lambda_2} \end{matrix} \right] \cdot z_{\delta_3} + v_{\lambda_1} \cdot z_{\delta_1} + \left[\begin{matrix} x_{\sigma_1} + x_{\sigma_2} \end{matrix} \right]$$

步骤一： $\begin{bmatrix} Q_{11} \cdot z_{\delta_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{12} \cdot z_{\delta_1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{\lambda_1} \cdot z_{\delta_1} \end{bmatrix} + Q_1$

步骤二： $\begin{bmatrix} Q_{21} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q_{23} \end{bmatrix} + Q_1$

步骤三： Q_3

图 7 定位精度概率密度函数的分步推导过程

其中 Q_{ij} 中 i 表示步数， j 表示第 i 步中计算后的函数表达式。

3 定位精度测量实验

在获取定位精度概率密度函数的推导方法后，采用激光干涉仪测量精密线性平台的定位精度，如下图所示：

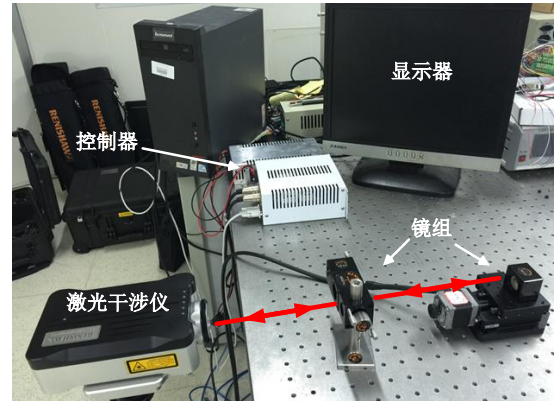


图 8 定位精度测量实验装置分布图

根据该精密线性平台的工作特点，查询产品手册，分析各组件的装配精度^[17]，各误差项的分布区

间与分布特点如表 4 所示：

表 4 各误差项分布特点与区间

误差参数	分布区间	分布特点
$x_{\sigma 1}$	$(-0.1, 0.1)$	均匀分布
$x_{\sigma 3}$	$(-4, 4)$	正态分布
$z_{\sigma 1}, z_{\sigma 2}, z_{\sigma 3}$	$(-3, 3)$	正态分布
$v_{\lambda 1}, v_{\lambda 2}, v_{\lambda 5}$	$(-1, 1)$	正态分布

考虑微行程下精密线性平台定位精度分布规律的具体表征。设运动量 $D=50\mu\text{m}$ ，测量 4000 次，分析 $50\mu\text{m}$ 行程下该运动平台定位精度分布规律，结果如图 9 所示：

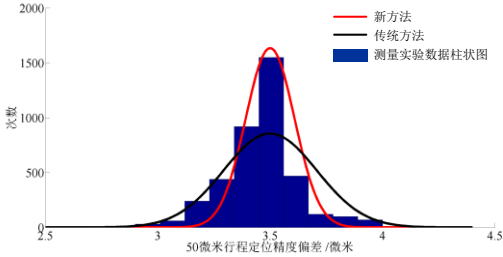


图 9 $50\mu\text{m}$ 行程下两种方法与实验结果关系比较图

从图 9 可看出，基于误差流理论的用于表征微行程定位精度的概率密度函数的分布特点均以均值 $\mu=3.5\mu\text{m}$ 为中心，分布区间约为 $\pm 0.5\mu\text{m}$ ，但基于误差流理论的概率密度函数推导表征方法更为集中于中心处（均值），相较于传统表征方法的正态分布曲线，其分布规律与实测数据结果更贴合，可从 R^2 值看出，这与式 (9) - (11) 的数学推导结论一致。

表 5 新方法与传统方法的结果对比

表征曲线	表达式	R^2 值
基于 PDF 传递的推导曲线	$E_x = (v_{\lambda_1} + v_{\lambda_2} + v_{\lambda_5}) \cdot z_{\sigma_2} + (v_{\lambda_3} + v_{\lambda_4}) \cdot z_{\sigma_1} + v_{\lambda_1} \cdot z_{\sigma_3} + x_{\sigma_1} + x_{\sigma_2}$	0.9249
正态分布曲线	$E_x = x_{\sigma_1} + x_{\sigma_2}$	0.7848

考虑全行程下推导曲线与正态分布曲线的表征特点，分别测量 0.01mm, 0.02mm, 0.08mm, 0.1mm, 0.2mm, 0.5mm, 0.8mm, 1mm 行程共 8 组，每组测 500 次。结果如下图所示：

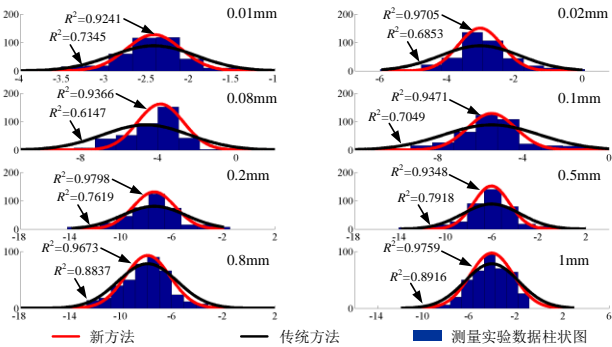


图 10 微行程 (<1mm) 下拟合函数与实验结果比较图

从结果可知，相较于传统方法采用正态分布概率密度函数，新方法与实验数据更为贴合，可从 R^2 值看出。在此微行程区间中，更小的行程区间，如

0.01mm、0.02mm 等，传统方法与实验数据相差较大，表明采用正态分布描述此行程区间的定位精度不够精确；较大的行程区间，如 0.8mm、1mm 等，传统方法与实验数据较接近，表明采用正态分布描述定位精度是较精确的并且可行的。

通过理论推导与实测结果共同分析得出，传统的定位精度表征方法是将各误差项进行敏感性分析，遴选出影响权重较大的误差项后，将其统一视作独立同分布，基于大数定理与中心极限定理，计算得出中心值与置信区间。在运动行程较长、各误差项间敏感性差异较大、对于定位精度分布精度要求不高的情况下，为简化计算，采用正态分布描述定位精度的分布规律是较为可行的。然而，在微行程尺度下，运动行程小，各类误差参数影响权重较接近，且耦合机理复杂，基于概率密度函数逐步推导定位精度分布函数的方法，可准确获取表征定位精度分布规律的解析式。

4 实验数据分析与讨论

从上文分析可知，定位精度受到各类误差项影响。在不同行程区间，各误差项影响权重不同。以下图为例，基于 ISO230-2 标准体系下，在表征精密线性平台运动准确度的指标中，定位精度及相关指标群，如系统偏差、反向间隙、重复定位精度等，随行程逐渐变小而发生不同程度的变化。

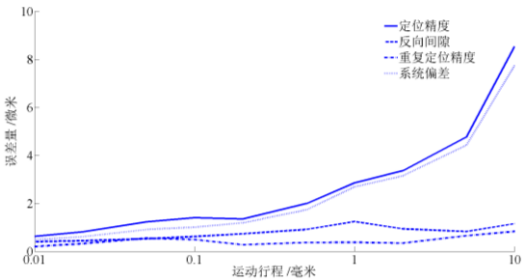


图 11 微-宏行程下精度指标变化关系

在微-宏行程区间 (0.01mm-10mm)，定位精度随行程增大而逐渐增大，体现出较为明显的单调性与非线性特征。在微行程区间 (0.01mm-1mm)，增幅不明显；在宏行程区间 (1mm-10mm)，增幅明显。各精度指标中，系统偏差与定位精度区间较一致，而重复定位精度与反向间隙变化不大。考虑到上述精度指标群均反映的为影响定位精度的各几何误差项，如重复定位精度反映动力源的稳定性，反向间隙反映装配误差，系统偏差反映配件自身的加工误差，因此，可进一步分析微-宏行程区间下影响定位精度各误差项权重的变化情况。

精密线性平台的主要动力为细分后的高精度步进电机，为研究微-宏行程区间下动力源稳定性，将测量电机的输出精度，实验装置如下图所示。

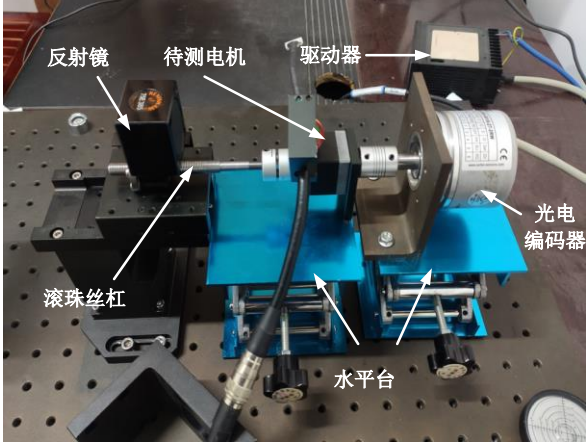


图 12 电机输出精度测量装置图

图 12 中，分别采用激光干涉仪和光电编码器测得精密线性平台实际运动位移与电机轴输出转角。测得微行程下定位精度、电机输出精度与滚珠丝杠副导程误差间的关系。为使测量结果更为精确，减少安装误差的影响，部分组件予以拆除，如载物台、底座、导轨副，结果如图 13 所示。

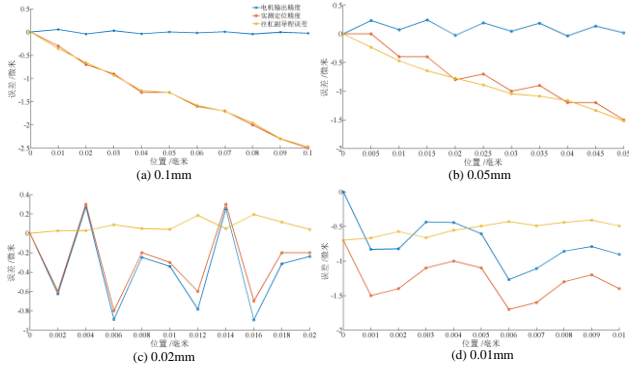


图 13 0.1mm-0.01mm 行程下定位精度误差组成分布图

通过比较四组微行程的实验结果可以发现，在 0.1mm 行程下，导程误差与定位误差（精度）保持高度一致，而电机输出精度影响可忽略不计；随着行程逐渐变小，电机输出精度影响权重开始增大，在 0.05mm 行程下，电机输出波动已反映至定位精度，同时也包括导程误差的影响；在 0.02mm 行程下，电机输出精度与定位误差的同步性保持一致，在部分区间受到了导程误差的影响；在 0.01mm 行程下，电机输出精度与定位误差的变化趋势仍保持一致。可以看出，随着行程逐渐减小，电机输出精度，即重复定位精度的影响权重逐渐增大，而丝杠副导程误差的影响逐渐减小。

若基于数学表达式描述定位精度的形成机理，如下式所示：

$$F(X) \approx n \cdot E(X) + \sqrt{n} \cdot \text{std}(X) \cdot N(0,1) + o(\sqrt{n} \cdot \text{std}(X)) \quad (12)$$

其中，等式右边第一项为均值，第二项为标准正态分布下的标准差，第三项为高阶项。若采用 3σ 法表征定位精度，则忽略部分与总值比例为 $10^{-4} \sim 10^{-3}$ 数量级，即传统方法采用正态分布描述定位精度时略去的部分。如某行程为 20mm 的精密线性平台，其定位精度为 $10\mu\text{m}$ ，考虑 $10\mu\text{m}/20\text{mm}=5 \times 10^{-4}$ ，因此采用正态分布表征定位精度在 3σ 范围内，较为合理。然而，若进入微行程尺度 ($<1\text{mm}$)，其定位精度与运动行程之比大于 10^{-3} 数量级，表明高阶部分的影响无法忽略，因此需要采用基于误差流理论的概率密度函数方法，推导并获取用于表征定位精度的概率密度函数解析式。

5 结论

(1) 本文基于“误差流”理论，通过分析建立精密线性平台定位精度误差源，提炼误差传递规律，采用齐次变换矩阵建立误差模型，推导得到用于表征定位精度分布规律的概率密度函数。实验结果表明，在微行程尺度 (0.01mm-1mm) 下，新方法比传统方法更精确，更能体现精密线性平台微行程运动特性，可弥补正态分布表征过程中丢失的分布信息；在宏行程尺度 ($>1\text{mm}$) 下，新方法与传统方法均较好的反映定位精度分布规律。在实际使用时，可根据运动系统适用范围选取不同的定位精度表征方法。

(2) 精密线性平台定位精度随运动行程变化而呈现不同特性，其中影响定位精度的各类误差项及相应权重也发生变化。通过分析定位精度及相关指标群发现，随着行程从宏尺度向微尺度变化，重复定位精度所占权重逐渐增大，而系统偏差的影响逐渐减小。从误差源角度分析，电机输出精度与定位误差的变化趋势随行程变小而逐渐保持一致，丝杠副导程误差的影响权重逐渐减小。

(3) 采用基于“误差流”理论的定位精度表征方法，不仅可以掌握定位精度的传递规律，而且可以精确得到不同行程下定位精度的分布信息，对于后续提升平台精度与拓展应用范畴具有较为直接的帮助。本文的研究结果对提升精密线性平台定位精度与丰富精密运动系统误差理论均具有极强的指导意义和参考价值。

参 考 文 献

- [1] 张揽宇. 高速大行程宏微复合运动平台的振动抑制与精密定位方法研究[D]. 广东工业大学博士学位论文, 2018.

- ZHANG Lanyu. Vibration reduction mechanism and precision positioning method for high-speed large-stroke macro-micro composite motion stage[D]. Guangdong University of technology, 2018.
- [2] ZHANG P, CHEN Y, ZHANG C, et al. Influence of geometric errors of guide rails and table on motion errors of hydrostatic guideways under quasi-static condition[J]. International journal of machine tools and manufacture, 2018, 125: 55-67.
- [3] MAJDA P, POWALKA B. Rapid method to determine accuracy and repeatability of positioning of numerically controlled axes[J]. International journal of machine tools and manufacture, 2019, 137: 1-12.
- [4] ISO 230-2:2014(E). Test code for machine tools – Part 2: Determination of accuracy and repeatability of positioning of numerically controlled axes. International Standard Organization, Switzerland, 2014.
- [5] 李杰, 谢福贵, 刘辛军等. 五轴数控机床空间定位精度改善方法研究现状[J]. 机械工程学报, 2017, 53(07): 113-128.
- LI Jie, XIE Fugui, LIU Xinjun, et al. Analysis on the research status of volumetric positioning accuracy improvement methods for five-axis NC machine tools[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(7): 169-184.
- [6] 李文龙, 谢核, 尹周平等. 机器人加工几何误差建模研究: II 参数辨识与位姿优化[J]. 机械工程学报, 2021, 57(7): 169-184.
- LI Wenlong, XIE He, YIN Zhouping, et al. The research of geometric error modeling of robotic machining: II Parameter identification and pose optimization[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(7): 169-184.
- [7] 柴馨雪, 杨泳, 徐灵敏等. 2-UPR-RPU 并联机器人的动力学建模与性能分析[J]. 机械工程学报, 2020, 56(13): 110-119.
- CHAI Xinxue, YANG Yong, XU Lingmin, et al. Dynamic modeling and performance analysis of a 2-UPR-RPU parallel manipulator[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2020, 56(13): 110-119.
- [8] 叶长龙, 王瑞, 赵东等. 基于旋量理论的全方位移动机器人运动与误差分析[J]. 沈阳航空航天大学学报, 2021, 38(3): 33-39.
- YE Changlong, WANG Rui, ZHAO Dong, et al. Analysis of motion and error of omnidirectional mobile robot based on spinor theory[J]. Journal of Shenyang Aerospace University, 2021, 38(3): 33-39.
- [9] TANG H, DUAN J, LAN S, et al. A new geometric error modeling approach for multi-axis system based on stream of variation theory[J]. International journal of machine tools and manufacture, 2015, 92: 41-51.
- [10] 江献良, 陈凌宇, 郑杰基等. 基于数字孪生模型的直驱部件高精度控制方法[J]. 机械工程学报, 2021, 57(17): 98-109.
- JIANG Xianliang, CHEN Lingyu, ZHENG Jieji, et al. High-precision control method of direct drive components based on digital twin model[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2021, 57(17): 98-109.
- [11] WANG Z, WANG D, YU S, et al. A reconfigurable mechanism model for error identification in the double ball bar tests of machine tools[J]. International journal of machine tools and manufacture, 2021, 165: 132-141.
- [12] LI M, WANG L, YU G, et al. A new calibration method for hybrid machine tools using virtual tool center point position constraint[J]. Measurement, 2021, 181: 109582.
- [13] ZHONG G, WANG C, YANG S, et al. Position geometric error modeling, identification and compensation for large 5-axis machining center prototype[J]. International journal of machine tools and manufacture, 2015, 89: 142-150.
- [14] 赵家黎, 郭伟, 牛占文等. 基于误差流理论的多工位装配过程质量稳定性[J]. 机械工程学报, 2006, (11): 88-93.
- ZHAO Jiali, GUO Wei, NIU Zhanwen, et al. Quality stability of multi-stations assembly process based on stream of variation[J]. Journal of Mechanical Engineering, 2006, (11): 88-93.
- [15] SHI J. Stream of variation modeling and analysis for multi-stage manufacturing processes[M]. Florida: CRC Press, Boca Raton, US, 2007.
- [16] SHI J, ZHOU S. Quality control and improvement for multi-stage systems: a survey [J]. IIE Transactions, 2009, 41: 744-753.
- [17] Suruga Seiki Corporation. Suruga fiber alignment information: Alignment system, <http://eng.surugaseiki.com/alignment>.

作者简介: 唐皓, 男, 1988 年出生, 副教授。主要研究方向为复杂精密系统误差分析。

E-mail: tanghao@hnust.edu.cn